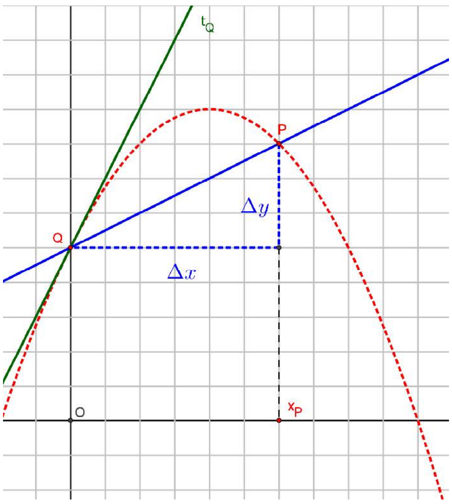
Pendenza di una retta tangente a una parabola di equazione $f(x) = ax^2 + bx + c$, in un punto di coordinate $[x_0; f(x_0)]$

Lee *rette* passanti per un punto di coordinate $(x_0; y_0)$ hanno equazione: $y - y_0 = m(x - x_0)$. L'altr'anno abbiamo dimostrato, *con molti conti*, che: data $\mathscr{P}: y = ax^2 + bx + c$, e dato un punto $\mathbf{T}(x_0; y_0) \in \mathscr{P}$, la pendenza m della **retta tangente** a $\mathscr{P}$ in T è: $m = 2ax_0 + b$.

Quest'anno troveremo un metodo *più rapido* per *dimostrare* lo stesso risultato. Un metodo applicabile al grafico di una qualunque funzione.

Questo metodo nasce in **fisica**. In particolare ha a che fare con il calcolo della *velocità istantanea* in un moto vario (e con *variazioni istantanee*, in genere).

ES1 Caso numerico



La retta, tangente alla parabola $\mathscr{P}: y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5$ nel punto **Q**(0;5) è $t_Q: y = 2x + 5$. Infatti, usando la *relazione* $m = 2ax_0 + b$ si ha: $m_{t_Q} = 2\left(-\frac{1}{4}\right)x_Q + 2 = 2$. E usando la *formula* già richiamata: $(y - y_Q) = m \cdot (x - x_Q)$, si ottiene l'equazione precedente. Come già detto, vogliamo trovare questo valore in un modo diverso da quello usato l'altr'anno.

DEF La **retta tangente** in **Q** è la *retta limite* delle rette secanti la parabola in **Q** e in punti, *sempre* più vicini a **Q**. Quindi la **pendenza** della **tangente** è il *limite* delle pendenze delle secanti.

Scriviamo in *linguaggio simbolico* e sotto forma di *calcoli* la frase precedente. Per farlo ci serve un altro **punto** della parabola. Chiamiamolo **P**.

Per il *principio fondamentale della geometria analitica*: $P\left(x_P; -\frac{1}{4}{x_P}^2 + 2x_P + 5\right)$.

$$m_{t_Q} = \lim_{P\to Q} m_{PQ} = \lim_{x_P\to x_Q} \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \lim_{x_P\to 0} \frac{\left(-\frac{1}{4}{x_P}^2 + 2x_P + 5\right) - 5}{x_P - 0} = \lim_{x_P\to 0} \frac{-\frac{1}{4}{x_P}^2 + 2x_P}{x_P} =$$

$$= \lim_{x_P\to 0} \frac{x_P\left(-\frac{1}{4}x_P + 2\right)}{x_P} = \lim_{x_P\to 0} -\frac{1}{4}x_P + 2 = \mathbf{2} \quad \textit{CVD}$$

Perché, per $x_P \to 0$, il termine $-\frac{1}{4}x_P$ è *trascurabile*.

ES2 Caso numerico - letterale

Nella parabola $\mathscr{P}: y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5$. La retta t_A, tangente alla parabola nel punto $\boldsymbol{A}\left(x_A; -\frac{1}{4}{x_A}^2 + 2x_A + 5\right)$, ha pendenza: $\boldsymbol{m_{t_A}} = 2\left(-\frac{1}{4}\right)x_A + 2 = -\frac{1}{2}x_A + 2$. **Dimostriamolo.**

Come già detto, la retta tangente in **A** la pensiamo come *retta limite* delle rette secanti la parabola in **A** e in altri punti, *sempre più vicini* ad **A**.

Essendo passati da un punto con *coordinate numeriche* a un punto con *coordinate letterali*, sarà utile trovare un modo per indicare un punto *vicino ad* **A** nel modo più sintetico possibile.

Propongo che questo punto si chiami **B** e che la sua ascissa sia: $x_B = x_A + h$. Sia cioè ricavabile *incrementando* x_A. Di conseguenza sarà: $y_B = -\frac{1}{4}(x_A+h)^2 + 2(x_A+h) + 5$. Quindi, svolgendo i conti:

$$m_{t_A} = \lim_{B\to A} m_{AB} = \lim_{x_B\to x_A} \frac{y_B - y_A}{x_A + h - x_A} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[-\frac{1}{4}(x_A+h)^2 + 2(x_A+h)+5\right] - \left[-\frac{1}{4}{x_A}^2 + 2x_A + 5\right]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{4}({x_A}^2 + 2x_A h + h^2) \quad + 2(x_A+h) + 5 + \frac{1}{4}{x_A}^2 - 2x_A - 5}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{4}{x_A}^2 - \frac{2}{4}x_A h - \frac{1}{4}h^2 + 2x_A + 2h + 5 + \frac{1}{4}{x_A}^2 - 2x_A - 5}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{2}{4}x_A h - \frac{1}{4}h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\left(-\frac{1}{2}x_A - \frac{1}{4}h + 2\right)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{2}x_A - \frac{1}{4}h + 2 = \mathbf{-\frac{1}{2}x_A + 2}$$

CVD. Perché, per $h \to 0$, il termine $-\frac{1}{4}h$ è *trascurabile*.

Considerando la retta t_Q tangente alla parabola $\mathscr{P}: y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5$ in **Q** come *retta limite* delle **secanti** alla parabola; applicando il **principio fondamentale** della **geometria analitica**, hai trovato la **funzione** che associa a ogni *x*, la **pendenza** della retta **tangente** alla parabola $\mathscr{P}$, nel punto di ascissa *x*: $m(x) = -\frac{1}{2}x + 2$. Questa funzione si chiama **derivata prima** della *funzione-parabola*.

Caso generico

THM Data una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, e dato un punto $\mathbf{T}(x_0; y_0)$ della parabola, la pendenza m della retta tangente alla parabola in T è: $m = 2ax_0 + b$.

Dato $\mathbf{T}(x_0; a{x_0}^2 + bx_0 + c)$ un altro punto della parabola può essere quello corrispondente all'*ascissa incrementata* di **T**: $\mathbf{S}[x_0 + h; a(x_0+h)^2 + b(x_0+h) + c]$.

Come prima, scriviamo il calcolo per stabilire la **pendenza** della retta **tangente** alla parabola nel punto **T**, come *limite delle secanti* **TS**.

$$m_{t_T} = \lim_{S\to T} m_{TS} = \lim_{x_T\to x_S} \frac{y_S - y_T}{x_T + h - x_T} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[a(x_0+h)^2 + b(x_0+h) + c] - [a{x_0}^2 + bx_0 + c]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a{x_0}^2 + 2ax_0 h + ah^2 + bx_0 + bh + c - a{x_0}^2 - bx_0 - c}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2ax_0 h + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2ax_0 + ah + b)}{h} = \lim_{h\to 0}(2ax_0 + ah + b) = \mathbf{2ax_0 + b}$$

CVD. Perché, per $h \to 0$, il termine ah è *trascurabile*.

Ovviamente i casi **ES1** ed **ES2** sono solo esempi, per entrare gradualmente nella situazione e solo l'ultimo è propriamente una **dimostrazione**.