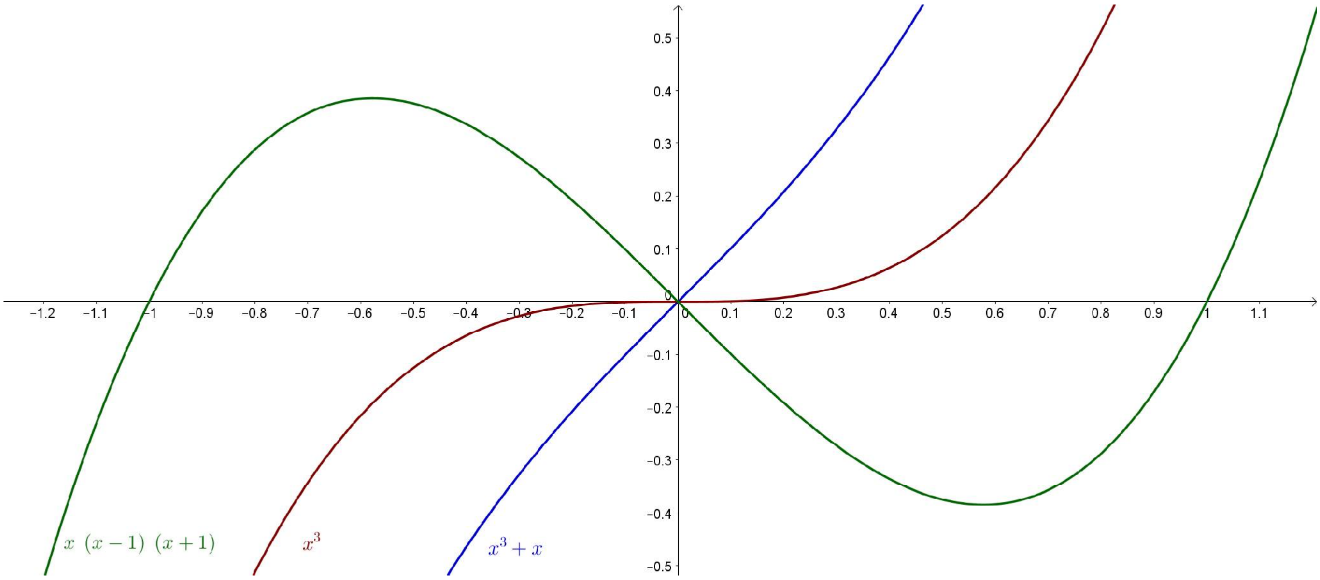
Funzioni polinomiali di terzo o quarto grado

Per disegnare il grafico di una funzione polinomiale dovete conoscere (e saper applicare): le **simmetrie** (strumento utilissimo per avere informazioni generali su una curva), le **scomposizioni**, le **disequazioni** di primo e di secondo grado e lo studio sull'**andamento** delle curve nelle loro **forme semplici**. Quest'ultimo aspetto, che abbiamo visto più di recente rispetto agli altri, approfondiamolo assieme.

Andamento di una cubica

Le cubiche con $a>0$ possono tutte essere ottenute come *traslate* (o *dilatate*) di una delle seguenti tre (per semplicità le ho scelte *simmetriche rispetto all'origine*; si può dimostrare, infatti, che ogni cubica è simmetrica rispetto a un punto del piano):



La **verde** ha due *gobbe* (un *massimo* e un *minimo relativi*), la **rossa** ha un *cambio di concavità* e una *tangente orizzontale* in O (O è un punto di *flesso* a tangente orizzontale) e la **blu** ha un *cambio di concavità* e una *tangente obliqua* in O (O è un punto di *flesso* a tangente obliqua).

La **verde** ha **tre** punti di intersezione con l'*asse x* (il polinomio ha tre *radici*[1]), la **rossa** è tangente in O all'*asse x* e lo interseca (il polinomio ha **una** radice con *molteplicità* maggiore di uno e dispari) e la **blu** è secante all'*asse x* (il polinomio ha **una** radice con *molteplicità* 1).

Il **perché** delle affermazioni precedenti lo capirai quando studieremo le **derivate**.

Per ora spero che potrai convincerti che una cubica può avere:

- un'intersezione con l'*asse x* (il tipo **blu** o una *traslata adeguatamente* degli altri due tipi)
- tre intersezioni con l'*asse x* distinte, o due coincidenti e una distinta (il tipo **verde**)
- tre intersezioni con l'*asse x* coincidenti (traslata lungo l'*asse x* del tipo **rosso**).

[1] Le traslate di questa curva potranno anche essere tangenti in un punto all'*asse x* (cioè il polinomio corrispondente può avere una radice con *molteplicità* due), oppure secanti solo in un punto.

Già che ci sono, ti scrivo i passi necessari a fare uno studio di funzione completo:

Per **disegnare** il **grafico** di una **funzione polinomiale**[2] serve:

1) Stabilire se il grafico è **simmetrico** o no rispetto all'*asse y* [$f(-x)=f(x)$] o rispetto all'origine [$f(-x)= -f(x)$]. O rispetto a un punto del piano o a una retta (quando affronteremo questi argomenti).

2) Stabilire il **segno** del grafico; cioè stabilire – se ci sono – *intervalli delle x* cui corrispondono *y positive*, *intervalli delle x* cui corrispondono *y negative* e *valori di x* cui corrispondono *y nulle* (le radici - o *zeri* - della funzione, cioè le ascisse dei punti di intersezioni del grafico con l'*asse x*).

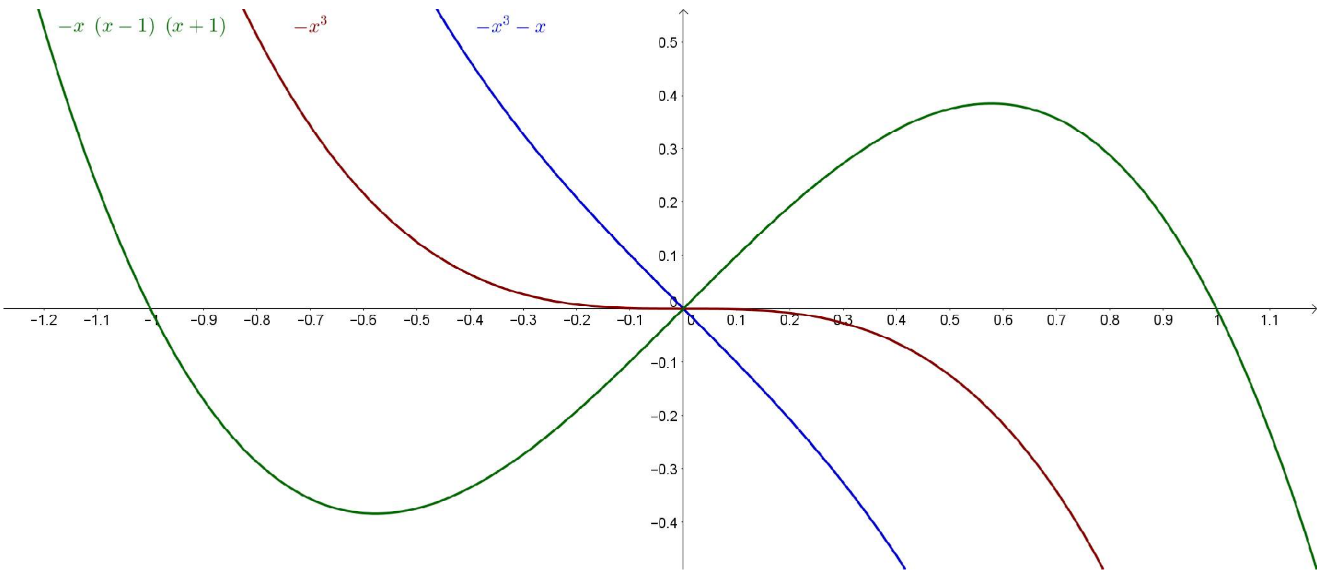
3) Stabilire l'ordinata del punto d'intersezione con l'*asse y* (che c'è sempre): $y = f(0)$.

4) Studiare il comportamento del grafico negli *intorni dell'infinito*. Per far questo dovrai imparare a calcolare i **LIMITI** per *x tendente all'infinito*.

5) Studiare *l'andamento* della funzione: stabilire per quali *intervalli* delle *x* la *funzione* è *crescente*, per quali *intervalli* delle *x* la *funzione* è *decrescente*, per quali *valori* di *x* la funzione presenta punti di massimo relativo, di minimo relativo o di flesso orizzontale. Lo strumento matematico da utilizzare è la **DERIVATA PRIMA**.

6) Stabilire con per quali *intervalli di valori di x* la **concavità** del grafico è rivolta verso l'alto e per quali *intervalli di valori di x* la concavità del grafico è rivolta verso il basso, e in quali punti avvengono *cambi di concavità* (punti di *flesso*). Lo strumento matematico da utilizzare è la **DERIVATA SECONDA**, di cui ci occuperemo subito dopo la derivata prima.

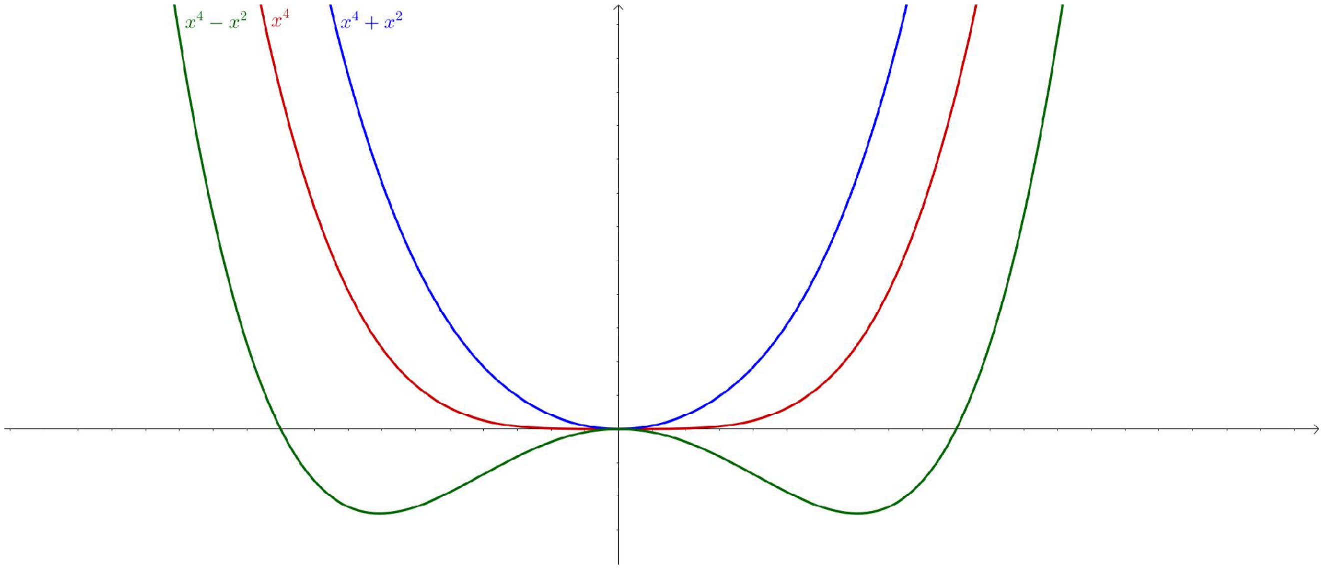
Le cubiche con $a<0$ possono tutte essere ottenute come *traslate* (o *dilatate*) di una delle seguenti tre:



[2] Attenzione: il disegno dei grafici di altri tipi di funzione che vedremo quest'anno richiederanno ulteriori passaggi.

Andamento di una quartica

Le quartiche con $a>0$ possono tutte essere ottenute come traslate (o dilatate) di una delle seguenti tre (per semplicità le ho scelte simmetriche rispetto all'asse y; si può dimostrare, infatti, che ogni quartica è simmetrica rispetto a una retta parallela all'asse y):



ESERCIZIO Scrivi tu le caratteristiche di ciascuna.

Come per le cubiche, spero che potrai convincerti che una cubica può avere:

- nessuna intersezione con l'*asse x* (una *traslata verso l'alto* di ciascuno dei tre tipi);
- due intersezioni con l'*asse x* coincidenti (traslata lungo l'*asse x* del tipo **blu**);
- due intersezioni con l'*asse x* distinte (una *traslata verso il basso* di ciascuno dei tre tipi);
- quattro intersezioni distinte con l'*asse x*, o due distinte e due coincidenti, o due coppie *distinte* di coincidenti (una *traslata verso l'alto* del tipo **verde**);
- quattro intersezioni coincidenti (una traslata lungo l'*asse x* del tipo **rosso**).

Le quartiche con $a<0$ possono tutte essere ottenute come traslate (o dilatate) di una delle seguenti tre: